

УДК 372.851

О НЕКОТОРЫХ БИСИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦАХ РЕГУЛЯРНОГО ТИПА

М.Н. Кирсанов¹, С.П. Черепанов²¹ c216@ya.ru; Московский энергетический институт² -; Московский энергетический институт*Рассмотрены основные свойства бисимметричных матриц.***Ключевые слова:** бисимметричная матрица, обратная матрица, главная диагональ.

В задачах строительной механике [1-3] встречаются матрицы, симметричные относительно главной и побочной диагонали. Полезно изучить некоторые их свойства, связанные с их определителем. Приведем два примера.

Пример 1. Последовательность q_i , $i = 1, \dots, N$ задает первую строку матрицы $c_{1,i} = q_i$, $i = 1, \dots, N$, остальные строки получаются с помощью последовательности p_j по правилу $c_{i,j} = p_{i-1}c_{1,j}$, $p_0 = 1$, $i = 1, \dots, [N/2]$, $j = i, \dots, N-1$. Если симметрия матрицы относительно главной диагонали обеспечивается равенством $c_{i,j} = c_{j,i}$, $i, j = 1, \dots, N$, то симметрия относительно побочной диагонали задается следующим соотношением $c_{N-j+1, n-i+1} = c_{i,j}$, $i = 1, \dots, N-1$, $j = i, \dots, N-1$. При $N = 6$ матрица имеет вид

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_2 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & p_1 q_4 & p_1 q_5 & q_5 \\ q_3 & p_1 q_3 & p_2 q_3 & p_2 q_4 & p_1 q_4 & q_4 \\ q_4 & p_1 q_4 & p_2 q_4 & p_2 q_3 & p_1 q_3 & q_3 \\ q_5 & p_1 q_5 & p_1 q_4 & p_1 q_3 & p_1 q_2 & q_2 \\ q_6 & q_5 & q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix}$$

Для четных значений $N = 2n$ имеем выражение для определителя

$$\det C = \frac{1}{p_n^2 - p_{n-1}^2} \prod_{i=1}^n (p_{i-1}q_{i+1} - p_i q_i)^2 - (p_{i-1}q_{N-i} - p_i q_{N-i+1})^2, \quad (1)$$

для нечетных значений $N = 2n - 1$

$$\det C = \frac{q_n}{p_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} (p_{i-1}q_{i+1} - p_i q_i)^2 - (p_{i-1}q_{N-i} - p_i q_{N-i+1})^2. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) получены методом индукции [3] в системе Maple [4].

В частности, если $q_i = N + 1 - i$, $p_i = i$ то $\det C = (N + 1)^{N-1}$. Обратная матрица также бисимметричная и является трехдиагональной матрицей Якоби со значениями $\frac{2}{N+1}$ по главной диагонали и значениями $\frac{-1}{N+1}$ на двух соседних. При $N = 4$ имеем

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $b_{i,j} = ((-1)^i + (-1)^j)/2$, $i, j = 1, \dots, N$. При $N = 4$ матрица имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для нечетных n определитель матрицы равен нулю, для четных $\det B = 2^{n-2}$. Обратная матрица имеет характерный «почти трехдиагональный» вид, причем одинаковые диагонали из чередующихся 1 и (-1) располагаются вдоль побочной, а в симметричных углах расположены единицы (вынесен множитель S). При $N = 4$:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в известных системах компьютерной алгебры (Maple, Mathematica) бисимметричные матрицы не упомянуты.

Литература

1. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы / М.И. Канатова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. - М: Инфра-М. - 2015. - Т. 1. - С. 31-34.
2. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы / М.Н. Кирсанов // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. - 2013. - Т. 1, № 3. - С. 89-93.
3. Кирсанов М.Н. Индуктивный метод решения задач механики / М.Н. Кирсанов // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»: материалы конференции и труды семинара. - Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. - С. 219-220.
4. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решение задач механики / М.Н. Кирсанов - СПб.: Лань, 2012. - 512 с.

SOME BISYMMETRIC MATRICES OF REGULAR TYPE

M.N. Kirsanov, S.P. Cherepanov

The basic properties of bisymmetric matrices are considered.

Keywords: bisymmetric matrix, invertible matrix, main diagonal.